



Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan-atmosphère

Sophie Thery

► To cite this version:

Sophie Thery. Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan-atmosphère. CANUM 2018 - 44e Congrès National d'Analyse Numérique, May 2018, Cap d'Agde, France. hal-01947885

HAL Id: hal-01947885

<https://inria.hal.science/hal-01947885>

Submitted on 8 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algorithmes de Schwarz et conditions absorbantes pour le couplage océan atmosphère

Sophie THERY

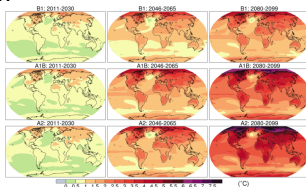
UGA, LJK, AIRSEA

CANUM, 31 mai 2018

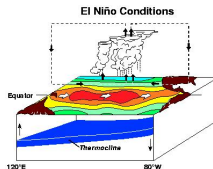
Cadre général : le couplage océan-atmosphère

Phénomènes physiques régis par les interactions océan atmosphère :

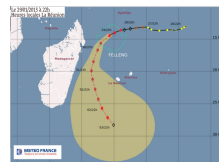
- Climat
- El Niño
- Cyclones tropicaux
- ...



climate modeling



seasonal forecasts

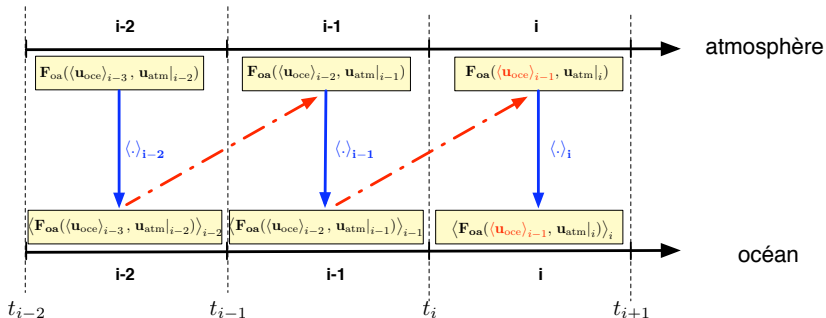


short term predictions

Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

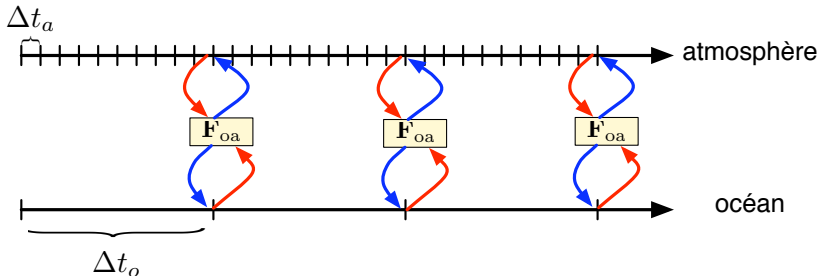
- Couplage asynchrone
 - ▶ équilibre des flux moyen sur chaque fenêtre de temps
 - ▶ problème de synchronisation



Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

- Couplage asynchrone
- Couplage synchrone
 - ▶ beaucoup de communication \Rightarrow implémentations inefficace
 - ▶ problèmes de validité physique et de stabilité mathématique.



Motivations

Les méthodes utilisées pour le couplage océan-atmosphère sont peu satisfaisantes :

- Couplage asynchrone
- Couplage synchrone
- Utilisation des algorithmes de Schwarz : ANR COCOA \Rightarrow implémentation pratique de Schwarz dans le couplé IPSL et Météo France.

- 1 Le couplage océan atmosphère
- 2 Les algorithmes de Schwarz
- 3 Application au couplage océan-atmosphère
- 4 Objectifs futurs

Modèle couplé d'océan-atmosphère

- Équations de Navier-Stokes

- ▶ Les variables recherchées : mouvement et contrainte sur fluide, force de gravitation et effet de Coriolis → équation vectorielle sur \mathbf{v} , p , ρ .
- ▶ Les principes physiques : conservation de la masse et de l'énergie thermique, conservation/diffusivité de la salinité et humidité, loi de conservation d'état.

Modèle couplé d'océan-atmosphère

- Équations de Navier-Stokes
- Approximation
 - ▶ champs gravitationnel vertical et constant
 - ▶ approximation du terme de Coriolis
 - ▶ approximation de Boussineq \rightarrow variation de ρ faible
 - ▶ Hypothèse quasi-hydrostatique \rightarrow simplifie l'équation suivant e_z .

Modèle couplé d'océan-atmosphère

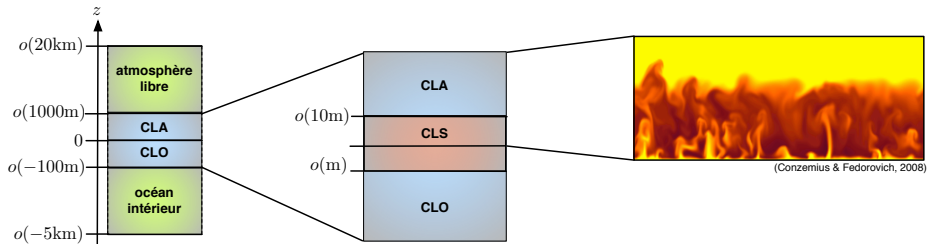
- Équations de Navier-Stokes
- Approximation
- Système d'équation primitives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) - fv - \nu_m \Delta u + \partial_x \rho / \rho_{oa} = 0 \\ \partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{v}v) + fu - \nu_m \Delta v + \partial_y \rho / \rho_{oa} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \rho, p, \mathbf{v} \end{array} \right.$$

- ▶ $\mathbf{v} = (u, v, w)$: vitesse
- ▶ ν_m : diffusion moléculaire
- ▶ f : fréquence de Coriolis
- ▶ p pression
- ▶ ρ masse volumique

Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

Paramétrisation de la turbulence à petite échelle



- Principaux échanges selon z .

Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon z .
- Décomposition de Reynoldz :

▶ $u = \tilde{u} + u'$

▶ $\langle u' \rangle = 0$, $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$ et $\langle \tilde{w} u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} \partial_z (\tilde{w} \tilde{u}) - f \tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \langle w' u' \rangle = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + \partial_z (\tilde{w} \tilde{v}) + f \tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \langle w' v' \rangle = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon z .
- Décomposition de Reynoldz :

▶ $u = \tilde{u} + u'$

▶ $\langle u' \rangle = 0$, $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$ et $\langle \tilde{w} u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - f \tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{u} = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + f \tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{v} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

- Hypothèse de hydrostatique proche de la surface : $\tilde{w} = 0$
- Hypothèse de Boussinesq (1897) : $\langle U'_\beta U'_\gamma \rangle = \nu_t \partial_\gamma \tilde{U}_\beta$

Modèle couplé d'océan-atmosphère simplifié

- Principaux échanges selon z .
- Décomposition de Reynoldz :

▶ $u = \tilde{u} + u'$

▶ $\langle u' \rangle = 0$, $\langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u}$ et $\langle \tilde{w} u' \rangle = 0$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - f \tilde{v} - \nu_m \Delta \tilde{u} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{u} = 0 \\ \partial_t \tilde{v} + f \tilde{u} - \nu_m \Delta \tilde{v} + \partial_z \nu_t \partial_z \tilde{v} = 0 \\ + \text{d'autres équations en } \tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}} \end{cases}$$

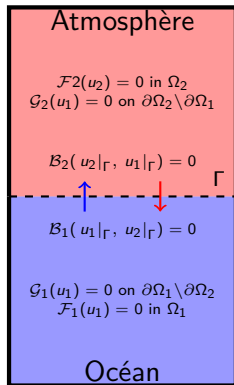
- Hypothèse de hydrostatique proche de la surface : $\tilde{w} = 0$
- Hypothèse de Boussinesq (1897) : $\langle U'_\beta U'_\gamma \rangle = \nu_t \partial_\gamma \tilde{U}_\beta$

Notre modèle d'étude \Rightarrow Couche d'Ekman (1905)

$$\begin{cases} \partial_t u - fv - \partial_z(\nu(z) \partial_z u) = F^u \\ \partial_t v + fu - \partial_z(\nu(z) \partial_z v) = F^v \end{cases}$$

avec $\nu(z) = az + b > 0$,

Notre modèle d'étude



Sur $\Omega_2 \times [0, T]$:

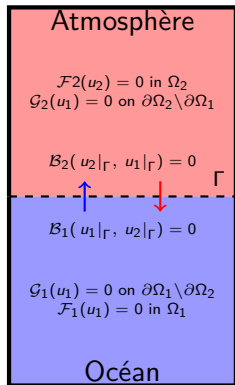
$$\begin{cases} \partial_t u_2 - f v_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z u_2) = F_2^u \\ \partial_t v_2 + f u_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z v_2) = F_2^v \end{cases}$$

Sur $\Omega_1 \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - f v_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z u_1) = F_1^u \\ \partial_t v_1 + f u_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z v_1) = F_1^v \end{cases}$$

+ Conditions initiales + Conditions aux limites extérieures + Conditions d'interfaces

Notre modèle d'étude



Sur $\Omega_2 \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - f v_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z u_2) = F_2^u \\ \partial_t v_2 + f u_2 - \partial_z(\nu_2(z) \partial_z v_2) = F_2^v \end{cases}$$

Sur $\Omega_1 \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - f v_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z u_1) = F_1^u \\ \partial_t v_1 + f u_1 - \partial_z(\nu_1(z) \partial_z v_1) = F_1^v \end{cases}$$

+ Conditions initiales + Conditions aux limites
 extérieurs + Conditions d'interfaces

- Effet du terme de Coriolis
- Effet d'une coefficient de diffusion variable

Rappel sur les algorithmes de Schwarz

Rappel sur les algorithmes de Schwarz dans le cas :

- deux sous domaines sans recouvrement
- sur une dimension
- sur des opérateurs linéaires :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1 = F_1 & \text{sur } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1 = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{\text{ext}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2 = F_2 & \text{sur } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2 = G_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{\text{ext}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 u_1 = \mathcal{C}_1 u_2 & \text{sur } \Gamma \\ \mathcal{C}_2 u_2 = \mathcal{C}_2 u_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Les algorithmes de Schwarz

Algorithm 1 Schwarz alterné

Require: u_2^0 sur Γ

$n = 0$

while non convergence ou $n < n_{max}$ **do**

résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1^n = F_1 & \text{sur } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1^n = G_1 & \text{sur } \partial\Omega_1^{ext}, \\ \mathcal{C}_1 u_1^n = \mathcal{C}_1 u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

puis résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2^n = f_2 & \text{sur } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2^n = g_2 & \text{sur } \partial\Omega_2^{ext}, \\ \mathcal{C}_2 u_2^n = \mathcal{C}_2 u_1^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

end while

Étude de la convergence des algorithmes de Schwarz

- Système vérifié par les erreurs :

$$e_j^n(z) = u_j^n(z) - u_j^*(z)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_j^n(z) = 0 & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{B}e_j^n = 0 & \text{sur } \Omega_j^{\text{ext}} \\ \mathcal{C}_je_j^n(0) = \mathcal{C}_je_k^{n-1}(0) \end{cases}$$

Étude de la convergence des algorithmes de Schwarz

- Système vérifié par les erreurs :

$$e_j^n(z) = u_j^n(z) - u_j^*(z)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}e_j^n(z) = 0 & \text{sur } \Omega_j \\ \mathcal{B}e_j^n = 0 & \text{sur } \Omega_j^{\text{ext}} \\ \mathcal{C}_je_j^n(0) = \mathcal{C}_je_k^{n-1}(0) \end{cases}$$

- Définition du facteur de convergence :

$$\rho = \frac{\|e_j^n\|}{\|e_j^{n-1}\|}$$

- La facteur de convergence dépend fortement des conditions d'interface.

Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles" \Rightarrow sans degrés de liberté.

Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles" \Rightarrow sans degrés de liberté.

Introduction de nouveaux opérateur avec degrés de liberté \Rightarrow conditions de transmissions exactes (convergence en 2 itérations).

Impacte des conditions d'interfaces

Conditions d'interfaces "naturelles" \Rightarrow sans degrés de liberté.

Introduction de nouveaux opérateur avec degrés de liberté \Rightarrow conditions de transmissions exactes (convergence en 2 itérations).

- Stationnaire \Rightarrow conditions non local en temps
- Optimisation :
 - ▶ méthode "min-max" :

$$\min_{\mathcal{C}_j \in \mathcal{C}} \left(\max_{\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]} \rho(\omega, \mathcal{C}_j) \right)$$

Introduit par : **Japhet** (1997), **Japhet & Nataf** (2000),
 Notion d'algorithme de Schwarz optimisé : **Gander et al.** (2001)

- ▶ approximation basse fréquence : Développement de Taylor sur les conditions de transmission exacte . **Nataf et al.** (1994)

Modèle simplifié pour le couplage océan-atmosphère

Sur $[0, H_j] \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_j(t, z) - f v_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z u_j(t, z)) = F_j^u(t, z) \\ \partial_t v_j(t, z) + f u_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z v_j(t, z)) = F_j^v(t, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j(t, H_j) = G_j^u(t), & v_j(t, H_2) = G_j^v(t) \\ u_j(0, z) = X_j^u(z), & v_j(0, z) = X_j^v(z) \end{cases}$$

Conditions naturelles de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} u_1(t, 0) & = & u_2(t, 0) \\ \nu_1(0) u_1(t, 0) & = & \nu_2(0) u_2(t, 0) \end{cases}$$

Modèle simplifié pour le couplage océan-atmosphère

Sur $[0, H_j] \times [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_j(t, z) - f v_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z u_j(t, z)) = F_j^u(t, z) \\ \partial_t v_j(t, z) + f u_j(t, z) - \partial_z(\nu_j(z) \partial_z v_j(t, z)) = F_j^v(t, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j(t, H_j) = G_j^u(t), & v_j(t, H_j) = G_j^v(t) \\ u_j(0, z) = X_j^u(z), & v_j(0, z) = X_j^v(z) \end{cases}$$

Conditions naturelles de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} u_1(t, 0) & = & u_2(t, 0) \\ \nu_1(0) u_1(t, 0) & = & \nu_2(0) u_2(t, 0) \end{cases}$$

Difficultés de ce cas d'étude :

- Couplage des variables u et v .
- Coefficients de diffusions variables

État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Zhang (2016) : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	Lions (1990) : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	Dubois (2007) : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D Gander, Xu (2016) : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Halpern (2002) : algo. Schwarz opt. , heat eq. Blayo, Rousseau, Tayashi () : algo. Schwarz opt. Shallow water	Lemarié (2013) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	Martin (2003) : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Zhang (2016) : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	Lions (1990) : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	Dubois (2007) : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D Gander, Xu (2016) : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Halpern (2002) : algo. Schwarz opt. , heat eq. Blayo, Rousseau, Tayashi () : algo. Schwarz opt. Shallow water	Lemarié (2013) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	Martin (2003) : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis \rightarrow couplage des composante u et v

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j - f v_j - \nu_j \partial_{zz}(u_j) = F_j^u \\ \partial_t v_j + f u_j - \nu_j \partial_{zz}(v_j) = F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis \rightarrow couplage des composante u et v

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_j - f v_j - \nu_j \partial_{zz}(u_j) = F_j^u \\ \partial_t v_j + f u_j - \nu_j \partial_{zz}(v_j) = F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable $\varphi = u + iv$.

Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis \rightarrow couplage des composante u et v

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable $\varphi = u + iv$.

Étude de l'effet de Coriolis sur la convergence

- Effet de Coriolis \rightarrow couplage des composante u et v

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v \\ \quad + \text{conditions extérieures} \\ \quad + \text{conditions d'interfaces} \\ \quad + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

Solution

On montre que le facteur de convergence est le même avec le changement de variable $\varphi = u + iv$.

- Coefficients de diffusions constant pour étudier seulement l'impacte de l'effet de Coriolis.

Avec des conditions d'interfaces Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} e_1^n(\omega, 0) = e_2^{n-1}(\omega, 0) \\ \nu_2 \partial_z e_2^n(\omega, 0) = \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) \end{cases}$$

Facteur de convergence

- Domaines infinis :

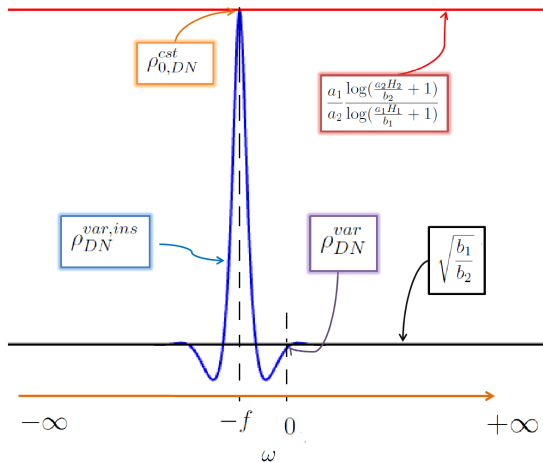
$$\eta_{DN}^{cst}(\omega) = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}$$

Indépendant de la fréquence temporelle

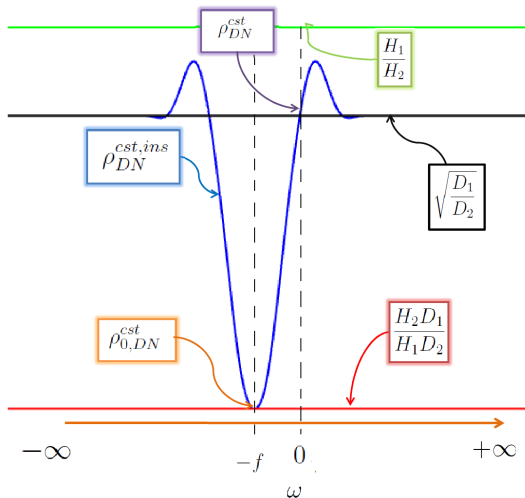
- Domaines finis :

$$\rho_{DN}^{cst}(\omega) = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left| \frac{\tanh \left(H_2 \sqrt{i \frac{\omega + f}{D_2}} \right)}{\tanh \left(H_1 \sqrt{i \frac{\omega + f}{D_1}} \right)} \right|$$

Facteur de convergence instationnaire



Facteur de convergence instationnaire



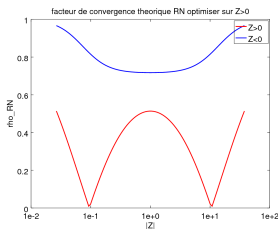
Conditions d'interfaces Robin-Robin

$$\begin{cases} \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) + p_1 e_1^n(\omega, 0) = \nu_2 \partial_z e_2^{n-1}(\omega, 0) + p_2 e_2^{n-1}(\omega, 0) \\ \nu_2 \partial_z e_2^n(\omega, 0) + p_2 e_2^n(\omega, 0) = \nu_1 \partial_z e_1^n(\omega, 0) + p_1 e_1^n(\omega, 0) \end{cases}$$

- Domaines infinis :

$$\frac{|-\sqrt{i(f+\omega)D_2} + p_1|}{|-\sqrt{i(f+\omega)D_1} + p_1|} \frac{|\sqrt{i(f+\omega)D_1} + p_2|}{|-\sqrt{i(f+\omega)D_2} + p_2|}$$

les p_j optimaux sont en général résultats de l'équioscillation



Sur l'équioscillation : **Gander, Halpern** (2006), Sur l'optimisation sans effet de Coriolis **Lemarié**(2013), **Dubois Gander** (2015)

- Le facteur de convergence domaines finis est très proche,

Étude de l'effet de la turbulence

$$\partial_t \varphi_j + i f \varphi_j - \partial_z (\nu_j \partial_z \varphi_j) = F_j^u + i F_j^v$$

Équation de Bessel

$$z \partial_{zz}^2 u + (2\alpha - 2\beta\nu + 1)z \partial_z u + (\beta^2 \gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu))u = 0$$

Solutions générale : $\phi_j = C_I I_0(\mu_j(\omega, z)) + C_K K_0(\mu_j(\omega, z))$ avec

$$\mu_j(\omega, z) = 2 \sqrt{i \frac{\omega + f}{a_j^2}} (a_j z + b_j)$$

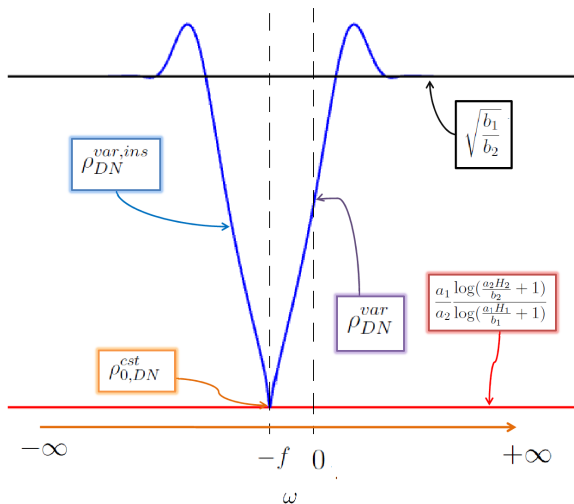
Facteur de convergence avec des conditions d'interfaces

Dirichlet-Neumann :

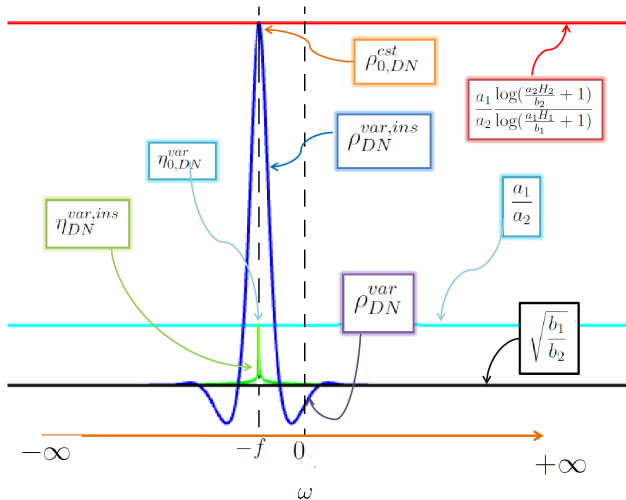
$$\rho_{DN}^{aff}(\omega) = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \tilde{\rho}(\omega)$$

avec $\tilde{\rho}$ en terme de fonctions de Bessel : $I_0(\mu_j(\omega, z))$, $I_1(\mu_j(\omega, z))$, $K_0(\mu_j(\omega, z))$, $K_1(\mu_j(\omega, z))$

Facteur de convergence instationnaire



Facteur de convergence instationnaire



Conditions d'interface Robin-Robin

- Fonctions de Bessel \Rightarrow difficulté de faire la méthode "min-max" .

Conditions d'interface Robin-Robin

- Fonctions de Bessel \Rightarrow difficulté de faire la méthode "min-max" .
- Conditions de transmission exacte :

$$\begin{cases} \sigma_1(\omega) &= \frac{b_2 \mu_2'(0) [K_1(\mu_2(0)) + B_2 I_1(\mu_2(0))]}{[K_0(\mu_2(0)) - B_2 I_0(\mu_2(0))]} \\ \sigma_2(\omega) &= \frac{b_1 \mu_1'(0) [K_1(\mu_1(0)) + B_1 I_1(\mu_1(0))]}{[K_0(\mu_2(0)) - B_2 I_0(\mu_2(0))]} \end{cases} \quad (1)$$

avec :

- $\mu_j^\pm(z) = 2\sqrt{\frac{i(\omega \pm f)}{a_j}} \left(z + \frac{b_j}{a_j} \right)$
- $\mu_j'(z) = \text{sign}(a_j) \sqrt{\frac{i(\omega \pm f)}{a_j z + b_j}}$

- hypothèse basse fréquence d'ordre zéro ($p_j = \sigma(\omega = 0)$) déjà satisfaisant.

État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Zhang (2016) : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	Lions (1990) : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	Dubois (2007) : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D Gander, Xu (2016) : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Halpern (2002) : algo. Schwarz opt. , heat eq. Blayo, Rousseau, Tayashi (2016) : algo. Schwarz opt. Shallow water	Lemarié (2013) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	Martin (2003) : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

État de l'art

		Coefficients de diffusion constants	Coefficients de diffusion variables
Stationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Zhang (2016) : algo. Schwarz opt. Eq. Helmholtz	Lions (1990) : convergence algo. Sch, equation de diffusion , coeff. variables
	Avec effet de Coriolis	Dubois (2007) : algo. Schwarz opt. advection-diffusion 2D Gander, Xu (2016) : algo. Schwarz opt. Helmot coeff variable	
Instationnaire	Sans effet de Coriolis	Gander, Halpern (2002) : algo. Schwarz opt. , heat eq. Blayo, Rousseau, Tayashi () : algo. Schwarz opt. Shallow water	Lemaire (2013) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion à coeff variables <i>Gander,</i>
	Avec effet de Coriolis	Martin (2003) : algo. Schwarz opt. Eq Saint-Venant Bennequin, Gander, Gouarin, Halpern (2004) : algo. Schwarz opt. eq. de Diffusion réaction 2D	

Objectifs futurs

- Des conditions d'interfaces plus réalistes:
faire apparaître u^* ?
Difficulté d'intégrer ce modèle dans un algorithme efficace.
- Réduire le coût de calcul :
 - ▶ Utilisation de modèle réduit ?
 - ▶ Essayer de passer outre les itérations de Schwarz.

Merci